Felpropagering

(jfr Sayer&Mansingh sid 17)

Definitionen för varians är:

(1) $$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

(summa över i=1,2,3...N mätpunkter antas i alla summa-uttryck på denna sida)

Vi vill beräkna varianssen σ_u^2 för en ny variabel $u = f(x, y, z, ...)$ på basen av experimentellt uppmätta värden $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...$ samt deras variansser σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2, ...

Enligt definitionen (1) får vi:

(2) $$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum (u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{N}\sum \left(f(x_i, y_i, z_i, ...) - \bar{u}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum \left(f(x_i, y_i, z_i, ...) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...)\right)^2$$

Detta kan vi förenkla genom att skriva $f(x, y, z, ...)$ som en Taylor-serie och ta med endast de två första termerna.

Från tidigare studier vet vi att en Taylor serie för funktionen $f(x, y, z, ...)$ i närheten av punkten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...)$ kan skrivas som: (lämnar bort termer av grad 2 och högre)

(3) $$f(x, y, z, ...) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - \bar{z}) + ...$$

här skall derivatorna evalueras i punkten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...)$

Nu sätter vi in (3) i (2):

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum \left(f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - \bar{z}) + ... - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...) \right)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - \bar{z}) + ... \right)^2$$

nu kan vi använda kvadreringsregeln och får:

$$= \frac{1}{N}\sum \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i - \bar{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_i - \bar{y})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_i - \bar{z})\right)^2 + ... + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + ... \right]$$

Här kommer de sk. kovarianstermerna som $2(x - \bar{x})(y - \bar{y})\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ att försvinna om x, y, z osv. är statistiskt oberoende variabler. Vi får:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i - \bar{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_i - \bar{y})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_i - \bar{z})\right)^2 + ... \right]$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{N}\sum (z_i - \bar{z})^2 + ...$$

där vi identifierar termer av formen $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$ och får till slut:

$$\boxed{\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + ...}$$